MATROIDE (zu greedy Algorithmen)

a) Motivation

Erinnern wir uns zunächst an Kruskal's Algorithmus für minimale Spannbäume. Genauer gesagt: wir schreiben hier den Algorithmus von Kruskal um einen <u>maximalen</u> Spannbaum zu berechnen (das macht keinen wesentlichen Unterschied, ist aber besseres Beispiel zu Matroiden).

<u>Der Greedy Algorithmus für max. SPANNBAUM</u> (Wiederholung)

<u>Eingabe:</u> Graph $G(V,E)$ mit Kantengewichten (zusammenhängend)

$S := \emptyset$ (Menge der gewählten Baumkanten)

WHILE $E \neq \emptyset$ DO

- entferne aus E eine Kante $e \in E$ mit maximalem Gewicht w_e; setze $E := E \setminus \{e\}$
- <u>falls</u> e keinen Kreis schließt mit (manchen) Kanten aus S (d.h. $S \cup \{e\}$ kreisfrei)
  dann setze $S := S \cup \{e\}$
  <u>sonst</u> verwerfe e

gib S aus

> Wann funktioniert dieser Typ von Greedy Algorithmus für maximale (oder minimale) Spannbäume, und nicht für viele andere Probleme wie z.B. max-INDEPENDENT SET?
> Im Folgenden beschäftigen wir uns mit dieser Frage...

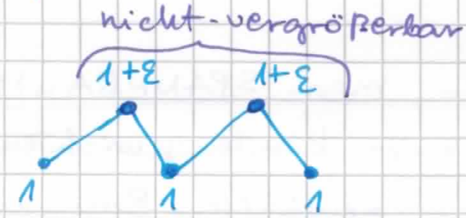
M2.

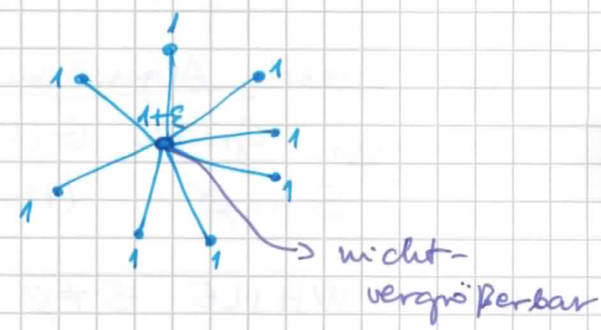
Erstmal eine grobe Erklärung ...

→ Was wäre ein analoger greedy Algorithmus für max-INDEPENDENT SET?

„Nimm Knoten mit maximalem Gewicht zu I hinzu, falls I eine unabhängige Knotenmenge bleibt (entferne die bereits betrachteten Knoten aus V)"

Beispiele, wann dieser Algorithmus max-IS nicht optimal löst:





dieser Algorithmus für max-IS ist schon mal deswegen nicht optimal, weil

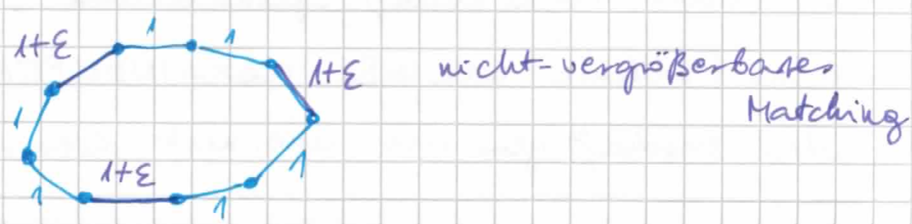
nicht-vergrößerbare unabhängige Knotenmengen (Engl: maximal)

≠ Eigenschaft des Mengensystems (aller unabhängigen Mengen) nicht der Gewichte

größtmögliche unabhängige Knotenmengen (Engl: largest maximum)

(größtmöglich ist immer auch nicht-vergrößerbar, aber andersrum nicht immer)

→ Ein anderes Problem für das ein solcher Greedy Algorithmus nicht optimal sein kann, ist max-MATCHING



Beachte, dass diese Gegenbeispiele funktionieren (d.h. Greedy funktioniert nicht) sogar wenn alle Gewichte gleich (=1) sind, d.h. in der ungewichteten Variante des Problems.

In dem ungewichteten Fall gilt sogar, dass die obige Eigenschaft eine entscheidende (äquivalente) Eigenschaft ist für das Funktionieren / nicht-Funktionieren von Greedy:

Der Greedy-Algorithmus funktioniert für die ungewichtete Variante „solcher" Probleme genau dann wenn alle nicht-vergrößerbare „gesuchte" (kreisfreie unabhängige) Teilmengen auch gleich groß größtmöglich sind. nenne es „einfache Maximalitätseigenschaft"

(Prüfen wir diese einfache Eigenschaft für kreisfreie Kantenmengen, (die im max-SPANNBAUM Problem gesucht werden): eine nicht-vergrößerbare kreisfreie Kantenmenge ist immer ein Spannbaum mit genau $|V|-1$ Kanten, also auch größtmöglich) (allgemein Spannwald mit $|V|-r$ Kanten, siehe später)

Für die (eigentliche) gewichtete Varianten unserer Probleme muss eine Maximalitätseigenschaft in viel stärkerer Form erfüllt sein, damit der Greedy Algorithmus immer optimal ist (und umgekehrt: ~~…~~ der Greedy Alg. ist für jede Gewichtung optimal, ~~dann ist~~ wenn diese Maximalitätseigenschaft erfüllt ist), nämlich „nicht-vergrößerbar ⇔ größtmöglich" muss in jedem Teilproblem (Teilmenge) der Eingabe erfüllt sein (klar, weil die restlichen Elemente z.B. Gewicht = 0 haben können, dann muss man im gegebenen Teilproblem maximieren).

M4. **Beispiel** (das Mengensystem von) (in einem fix. Graphen)

6.) **Matroideigenschaften für kreisfreie Kantenmengen**

Wir definieren und weisen nach die Maximalitätseigenschaft am Beispiel von kreisfreien Kantenmengen:

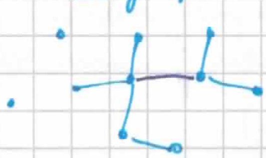
$\boxed{\text{Maximalitätseigenschaft}}$ **für kreisfreie Kantenmengen:**

Alle nicht-vergrößerbaren kreisfreien Teilmengen einer beliebigen fixierten Kantenmenge $E' \subseteq E$ in einem beliebigen fixierten Graphen $G(V, E)$ haben dieselbe Größe (und sind somit größtmögliche solche Teilmengen).

Für den Beweis brauchen wir die folgende Beobachtung:

Sei G ein beliebiger Graph mit r Zusammenhangskomponenten die jeweils $n_1\ n_2 \ldots n_r$ Knoten haben. Dann hat eine nicht-vergrößerbare kreisfreie Kantenmenge (ein sog. Spannwald) genau $n_1-1+n_2-1+n_3-1+\ldots+n_r-1 = n-r$ Kanten, weil ein Spannbaum der i-ten Zusammenhangskomponente n_i-1 Kanten hat.

Beweis der Maximalitätseigenschaft: $G'(V, E')$ ist auch ein Graph (ein Teilgraph von G), und die nicht-vergrößerbaren kreisfreien Kantenmengen in G' haben laut Beobachtung dieselbe Größe $n-r$ (wenn G' r Zusammenhangskomponenten hat). A

(In einer Zusammenhangskomponente kann man eine kreisfreie Kantenmenge solange vergrößern bis die Kantenmenge ein Spannbaum ist )

Die folgende Eigenschaft ist scheinbar stärker als die Maximalitätseigenschaft, wird sich aber als äquivalent zu ihr herausstellen. Wir formulieren und beweisen die Eigenschaft für kreisfreie Kantenmengen:

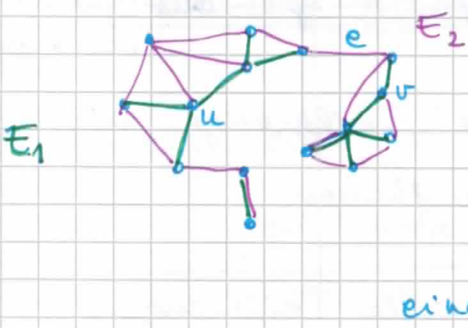
Ergänzungseigenschaft für kreisfreie Kantenmengen:

Seien $E_1, E_2 \subseteq E$ kreisfreie Kantenmengen, so dass $|E_1| < |E_2|$, dann gibt es eine Kante $e \in E_2 \setminus E_1$ so dass $E_1 \cup \{e\}$ immer noch kreisfrei ist.

(d.h. kreisfreie Mengen die nicht größtmöglich sind kann man erweitern/vergrößern aus einer beliebigen größeren kreisfreien Menge; dasselbe gilt nicht z.B. für unabhängige Knotenmengen oder Matchings)

Beweis der Ergänzungseigenschaft:

Aufwärmung: sei E_2 ein Spannbaum, also zusammenhängend. E_1 ist noch kein Spannbaum, weil $|E_1| < |E_2|$, also nicht zusammenhängend;



dann gibt es zwei Knoten u, v die in E_1 nicht mit einem Weg verbunden sind, aber in E_2 mit einem (eindeutigen) Weg verbunden sind.

Es gibt (mindestens) eine Kante e auf diesem Weg die verschiedene Komponenten von E_1 verbindet und deshalb $E_1 \cup \{e\}$ kreisfrei ist.

[Der Beweis ist fast dasselbe wenn E_2 auch kein Spannbaum ist: (V, E_2) hat $n - |E_2|$ Zusammenhangskomponenten und (V, E_1) hat $n - |E_1| > n - |E_2|$ Zusammenhangskomponenten.

M6.

Es muss mindestens zwei Knoten geben u, v, die im E_2 mit einem Weg verbunden sind, aber in E_1 nicht (sonst hätte (V, E_1) die gleichen oder weniger Zusammenhangskomponenten.) Der Rest des Arguments ist wie oben.] Δ

Diese Eigenschaft (Ergänzungseigenschaft) ist äquivalent mit der Maximalitätseigenschaft, und äquivalent mit der Eigenschaft, dass Greedy für jede Gewichtung optimal ist! (d.h. es reicht eine der Eigenschaften nachzuweisen wenn man Greedy verwenden dürfen möchte)

Wir fassen zusammen, und formalisieren die obigen Begriffe abstrakt →

Auf welchen Problemtyp wollen wir Greedy einsetzen?
(In diesem Fall für Greedy) wird die Lage allgemein so beschrieben:

- wir haben Elemente (Kanten)
- "gute" Teilmengen der Elemente werden gesucht (kreisfreie) (es gibt ~~eine~~ die Menge ~~der~~ "guten" Teilmengen – das System ~~aller~~ "guten" Teilmengen)
- mit maximalem Gesamtgewicht
- wir wollen eine optimale „gute" Teilmenge mit Greedy Schritt für Schritt aufbauen

→ hierfür ist es wichtig, dass alle Teilmengen einer guten (kreisfreien) Teilmenge selber gut (kreisfrei) sind, sonst wäre ein Aufbau durch kleineren Teilmengen hoffnungslos.

→ Wir fangen deshalb mit der Definition eines monotonen Mengensystems (d.h. des Systems von „guten" Teilmengen) an!

c.) Matroide: Definition

Ein Mengensystem ist eine Menge von Teilmengen einer (endlichen) Grundmenge X.

X

($\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen von X.)

<u>Definition:</u> Ein <u>monotones Teilmengensystem</u> über der endlichen Menge X ist ein Paar $(\mathcal{M}, X)$ so dass

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{M}$ besteht aus <u>manchen</u> Teilmengen von X)

- aus $Y \in \mathcal{M}$ und $Y' \subset Y$ folgt $Y' \in \mathcal{M}$

  (wir nennen die Mengen $Y \in \mathcal{M}$ <u>unabhängige</u> Mengen)

  Teilmengen von unabhängigen Mengen sind auch unabhängig

Wir wollen dass der Greedy Alg. gut funktioniert beim folgenden Problem:

<u>Das PROBLEM (abstrakt) zu optimieren</u> ist

<u>Eingabe</u>: ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ über der Menge X und Gewichtung $w_x \geq 0$ der Elemente $x \in X$

<u>Ausgabe</u>: Bestimme eine unabhängige Menge $Y_{max} \in \mathcal{M}$ mit maximalem Gesamtgewicht seiner Elemente.

(d.h. $$w(Y_{max}) = \max_{Y \in \mathcal{M}} w(Y)$$

wobei $$w(Y) = \sum_{x \in Y} w_x$$)

M8.

Der Greedy (Matroid-)Algorithmus für monotone Mengensysteme

- setze $Y := \emptyset$
- REPEAT
  - sei $x \in X$ das Element mit größtem Gewicht
    $X := X \setminus \{x\}$ (entferne x aus X)
  - IF $Y \cup \{x\} \in \mathcal{M}$ THEN $Y := Y \cup \{x\}$
    (falls $Y \cup \{x\}$ unabhängig ist, nimm x zu Y hinzu)

  UNTIL $X = \emptyset$

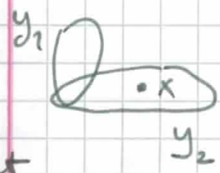
Wir definieren jetzt Matroide als monotone Mengensysteme für die der Greedy Alg. immer optimal ist. Danach beweisen wir, dass sie genau diejenige mit der Maximalitätseigenschaft, bzw. genau diejenige mit der Ergänzungseigenschaft sind:

Definition: Ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ heißt ein Matroid, wenn der Greedy Algorithmus für jede Gewichtung der Elemente $x \in X$ eine maximale unabhängige Menge $Y_{max} \in \mathcal{M}$ ausgibt; (d.h. mit maximalem Gewicht).

Theorem: Für ein beliebiges monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ sind äquivalent:

(a) $(\mathcal{M}, X)$ ist ein Matroid (siehe Def. oben)

(b.) die Ergänzungseigenschaft gilt: für je zwei unabhängige Mengen Y_1 Y_2 mit $|Y_1| < |Y_2|$ gibt es ein $x \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $Y_1 \cup \{x\} \in \mathcal{M}$



(c) die Maximalitätseigenschaft gilt: alle nicht vergrößerbaren (in Z) unabhängigen Teilmengen einer beliebigen Menge $Z \subseteq X$ besitzen dieselbe Größe.

Beweis: wir werden (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) beweisen.

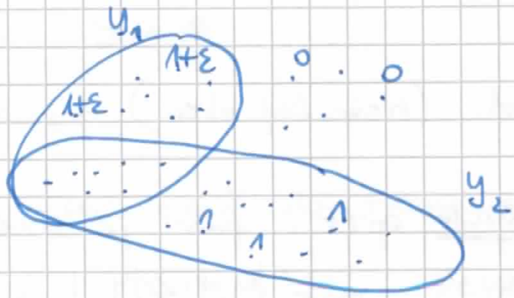
(a) $\Rightarrow$ (b) Angenommen $(\mathcal{M}, X)$ ist ein Matroid (Greedy für jede Gewichtung funktioniert), zeigen wir die Ergänzungseigenschaft, dh. wenn Y_1 und Y_2 unabhängig sind und $(|Y_1| < |Y_2|)$ dann kann Y_1 um ein Element aus Y_2 ergänzt werden.

Beweis durch Widerspruch: wir nehmen an, dass es solche Y_1 und Y_2 gibt, dass Y_1 nicht ergänzt werden kann aus Y_2

M 10.

sei $|Y_1| = p$

wir zeigen, dass in diesem Fall $\mathcal{M}$ doch kein Matroid ist, d.h. es gibt eine Gewichtung, so dass der Greedy Algorithmus eine nicht-optimale Lösung bestimmt. Eine geeignete Gewichtung dürfen wir wählen!



Wie können wir (mit welchen Gewichten) den Greedy Algorithmus reinlegen? Wir wollen, dass er Y_1 ~~[illegible]~~ findet (dort sind die Gewichte ein wenig höher), aber dann Y_1 nicht mehr erweitern kann; und jedoch ist Y_2 optimal, mit bisschen kleineren Einzelgewichten.

Seien die Gewichte $w_x = \begin{cases} 1+\varepsilon & x \in Y_1 \\ 1 & x \in Y_2 \setminus Y_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

→ Greedy wählt die Elemente von Y_1 zuerst

→ dann kann er Y_1 nicht aus Y_2 ergänzen

(ergänzt höchstens mit 0-Gewicht Elementen)

→ Greedy erreicht eine Lösung mit Gewicht

$$p \cdot (1+\varepsilon) = p + \varepsilon \cdot p$$

das Optimum ist aber mindestens

$$(p+1) \cdot 1 = p+1 > p + \varepsilon \cdot p \text{ falls } \varepsilon \text{ klein genug.}$$

(b) ⇒ (a) Ergänzungseigenschaft ⇒ Greedy ist optimal für jede Gewichtung

→ Voraussetzung: wenn Y_1 und Y_2 beide unabhängige Mengen, und $|Y_1| < |Y_2|$, dann gibt es ein $x \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig

→ Wir zeigen: Greedy findet für jede Gewichtung w_x der Elemente $x \in X$ eine optimale Lösung

→ <u>Beweis durch Widerspruch</u>: nehmen wir an, dass es eine Gewichtung w_x gibt, so dass Greedy eine nicht-optimale unabhängige Menge Y ausgibt.
Sei Y^* eine optimale Lösung.

→ Wir können annehmen o.B.d.A., dass Y und Y^* nicht-vergrößerbar sind (sonst dürfte man sie vergrößern); deshalb gilt $|Y| = |Y^*| = m$ für irgendein m (sonst wäre die kleinere von Beiden aus der größeren ergänzbar)

→ (wie sich Y und Y^* schneiden, spielt keine Rolle)

→ Seien $Y = \{y_1\, y_2 \dots y_m\}$
und $Y^* = \{y_1^*\, y_2^* \dots y_m^*\}$
so dass die entsprechenden Gewichte jeweils absteigend sortiert sind.

→ Da Y^* optimal ist, und Y nicht, gibt es Elemente y_i und y_i^* so dass $w_i < w_i^*$.
Seien y_k und y_k^* die ersten solche Elemente in der obigen Folge

M 12. Es gilt für die Gewichte

$$
\mathcal{Y}_1 \quad \boxed{\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ \end{array}} \qquad
\begin{array}{ccc}
w_1 & \geq & w_1^* \\
\geq & & \geq \\
w_2 & \geq & w_2^* \\
\geq & & \geq \\
\vdots & & \vdots \\
\geq & & \geq \\
w_{k-1} & \geq & w_{k-1}^* \\
\geq & & \geq \\
w_k & < & w_k^*
\end{array} \qquad
\boxed{\begin{array}{c} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_{k-1}^* \\ y_k^* \end{array}} \quad \mathcal{Y}_2
$$

→ Nennen wir die markierten (eingerahmten) Mengen $\mathcal{Y}_1$ bzw. $\mathcal{Y}_2$

Die unabhängige Menge $\mathcal{Y}_1$ ist nicht vergrößerbar (ergänzbar) aus $\mathcal{Y}_2$, weil Greedy kein weiteres Element mit Gewicht größer als w_k findet, während in $\mathcal{Y}_2$ alle Gewichte größer sind als w_k.

Dies widerspricht die Ergänzungseigenschaft für $\mathcal{Y}_1$ und $\mathcal{Y}_2$

d.) Matroide: Beispiele

1. Graph-Matroid

Sei $G(V,E)$ ein fixierter Graph

Seien $\mathcal{W} = \{E' \subseteq E \mid E' \text{ kreisfrei (Wald)}\}$ die unabhängigen Mengen. Dann ist $(\mathcal{W}, E)$ ein Matroid.
(die Ergänzungseigenschaft und auch die Maximalitätseigenschaft haben wir für Graph-Matroide oben bewiesen)
Sei w_e eine Gewichtung der Kanten. Der Greedy Matroid Algorithmus berechnet für G einen Spannbaum (einen <u>Spannwald</u>, falls nicht zusammenhängend) mit <u>maximalem</u> Gewicht.

Sei für jede $e \in E$ $w_e < w$ und setzen wir $w_e' = w - w_e$ als neue Gewichte, dann berechnet der Greedy Matroid Algorithmus einen <u>minimalen</u> Spannbaum (Spannwald), weil w genau $(n-r)$-mal im Gesamtgewicht vorkommt, also $\sum_{e \in S} w_e$ wird minimiert.

2. Matrix-Matroid

((Spalten-)Vektoren einer Matrix → deshalb der Name Matroid)

Sei $X = \{v_1, v_2 \dots v_m\}$ wo $v_1, v_2 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren sind

$$\mathcal{L} = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ ist linear unabhängig}\}$$

dann ist $(\mathcal{L}, X)$ ein Matroid

deshalb der Name <u>unabhängig</u>

→ Jede nicht vergrößerbare linear unabhängige Teilmenge einer fixierten Menge $Z \subseteq X$ hat die gleiche Anzahl von Vektoren (in $\mathbb{R}^m$ selbst wären das m Vektoren, eine Basis)

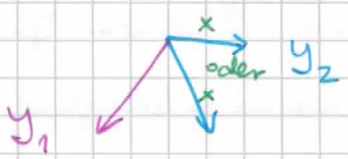
aber $\mathbb{R}^m$ ist nicht endlich

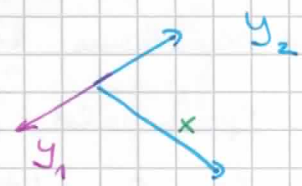
M14.

- Teilmengen von linear unabhängigen Mengen Y sind auch linear unabhängig

- Ergänzungseigenschaft für Matrix-Matroide: eine kleinere linear unabhängige Vektormenge kann immer aus jeder größeren linear unabhängigen Menge um einen Vektor x ergänzt werden so dass es linear unabhängig bleibt.

Beispiele in $\mathbb{R}^2$





in $\mathbb{R}^3$

$$Y_2 = \left\{ \begin{matrix} (1\ 0\ 0) \\ (0\ 1\ 0) \\ (0\ 0\ 1) \end{matrix} \right\} \qquad Y_1 \left\{ \begin{matrix} (1\ 1\ 0) \\ (1\ -1\ 0) \end{matrix} \right\}$$

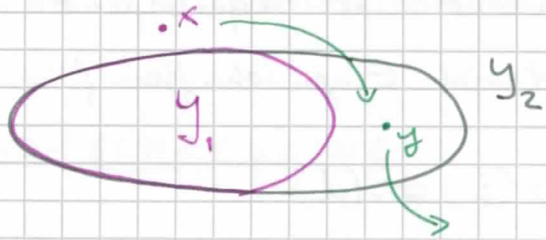
lin unabhängig

Eine 4-te äquivalente Matroid-Eigenschaft

(d.) Austauschbarkeit (auch Erweiterbarkeit genannt)

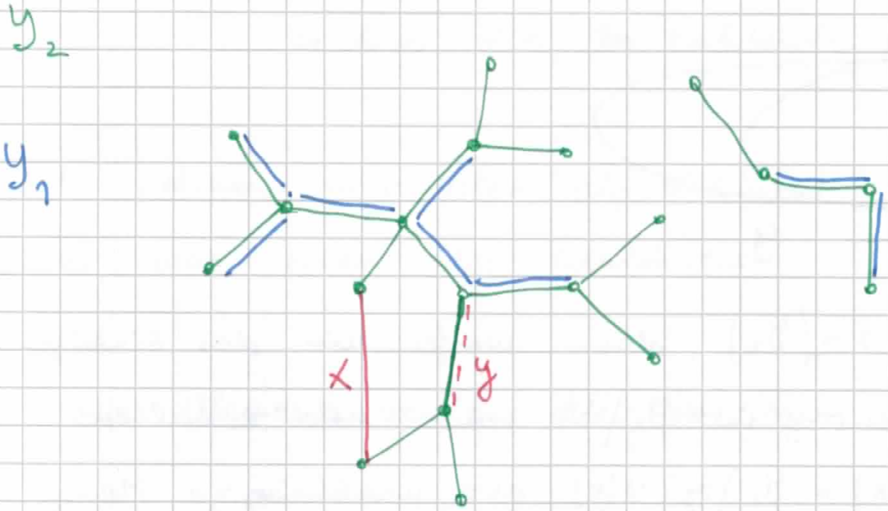
Ein monotones Teilmengensystem ist austauschbar wenn für je zwei unabhängige Mengen $Y_1 \subset Y_2$ und jedes $x \notin Y_2$, wenn $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig ist, dann gibt es eine $y \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $(Y_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ unabhängig ist.

(d.h. wir können x gegen eine y tauschen, und somit Unabhängigkeit bewahren)



(Beachte: wenn $Y_2 \cup \{x\}$ auch unabhängig ist, dann brauchen wir kein y rauszuwerfen, wir dürfen aber beliebige $y \in Y_2 \setminus Y_1$ rauswerfen.)

__Beispiel:__ Seien $Y_1 \subset Y_2$ kreisfreie Kantenmengen, so dass $Y_1 \cup \{x\}$ auch kreisfrei (unabhängig) aber $Y_2 \cup \{x\}$ hat einen Kreis (Warum kann x nicht mehr Kreise schließen??)



→ es gibt mindestens eine andere Kante in diesem Kreis die kein Element von Y_1 ist, (sonst hätte $Y_1 \cup \{x\}$ auch einen Kreis – den selben). Eine solche ~~diese~~ Kante $y \in Y_2 \setminus Y_1$ aus dem Kreis ~~soll~~ kann gegen x getauscht werden, damit $(Y_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ kreisfrei ist.

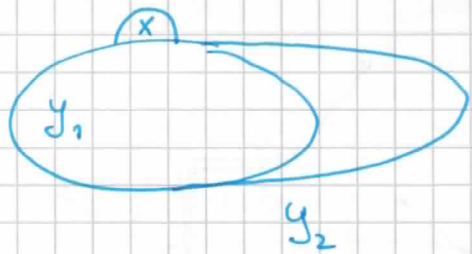
M16.

Theorem: die Austauschbarkeit ist äquivalent mit den drei bisherigen Matroid-Eigenschaften für ein monotones Mengensystem (M, X):

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$$

Beweis: wir zeigen nur eine Richtung, nämlich, dass die Austauschbarkeit aus der Ergänzungseigenschaft folgt $(b) \Rightarrow (d)$:

Seien $Y_1 \subset Y_2$ und $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig, $Y_2 \cup \{x\}$ aber zusammenhängend (nicht unabhängig)



- falls $|Y_1| + 1 = |Y_2|$, dann werfen wir das einzige Element y in $Y_2 \setminus Y_1$ raus, und erhalten $Y_1 \cup \{x\} = Y_2 \setminus \{y\} \cup \{x\}$ als unabhängige Menge

- falls $|Y_1| + 1 < |Y_2|$, können wir laut Ergänzungseigenschaft Elemente $y_1\ y_2 \ldots$ aus Y_2 zu $Y_1 \cup \{x\}$ hinzunehmen. Dies können wir solange machen, bis $Y_1 \cup \{x\} \cup \{y_1\ y_2\ y_3 \ldots\}$ $|Y_2|$-viele Elemente hat, d.h. nur ein Element y wurde noch nicht zu $Y_1 \cup \{x\}$ genommen. Wir haben jetzt eine unabhängige Menge, in der y gegen x getauscht wurde in Y_2. $\square$

Ein drittes Matroid-Beispiel:

3. MATROID-SCHEDULING

Eingabe: n Jobs $A_1\, A_2 \dots\dots A_n$ mit entsprechenden Fristen $f_1\, f_2 \dots\dots f_n$ und Strafen $b_1\, b_2 \dots\dots b_n$

b_i ist zu bezahlen wenn A_i zum Zeitpunkt f_i nicht abgearbeitet ist.

Die Ausführung einer jeden Aufgabe nimmt 1 Zeitschritt

Ausgabe: Ein Schedule der Jobs auf einem Prozessor, so dass die zu zahlende Strafe minimal ist

Was nehmen wir hier als Elemente der Grundmenge X, und was seien die Gewichte?

→ die Elemente werden die Jobs sein:

$$X = \{A_1\, A_2 \dots\dots A_n\}$$

→ wir wollen die Gesamtstrafe minimieren, d.h. die Strafe der nicht-ausgeführten Jobs. Das ist dasselbe wie die Strafe der ausgeführten Jobs zu maximieren! Sei deshalb b_i das Gewicht von Job A_i und

Welche Job-Mengen nennen wir unabhängig?

→ alle fristgerecht ausführbare Jobmengen.

M 18.

Definition: Eine Jobmenge $Y \subseteq X$ ist unabhängig

d.h. $Y \in \mathcal{M}$, genau dann wenn die Jobmenge ohne Fristüberschreitung von einzelnen Jobs, ausführbar ist.

Behauptung: $(\mathcal{M}, X)$ ist ein Matroid, und der Greedy Algorithmus liefert eine optimale Lösung (mit minimaler Strafe).

Woran erkennt man (oder der Greedy Algorithmus) ob eine Jobmenge Y fristgerecht ausführbar (d.h. unabhängig) ist?

Die folgende Darstellung wird hilfreich:

wir stellen jeden Job A_i genau vor seiner Frist f_i dar.

Eine Teilmenge der Jobs ist genau dann nicht fristgerecht ausführbar wenn ~~vor~~ irgendeinem Zeitpunkt f mehr als f Jobs auszuführen sind

(wie im Bild für $f=7$ dies ist der Fall.)

Beweis (dass (M, X) ein Matroid ist).

Wir weisen die Austauschbarkeit nach:

→ Falls $Y_1 \subset Y_2$, und $Y_1 \cup \{x\}$ und Y_2 ausführbare Aufgabenmengen sind, $Y_2 \cup \{x\}$ aber nicht ausführbar ist, wir sollen einen Job $y \in Y_2 \setminus Y_1$ finden, so dass $Y_2 \setminus \{y\} \cup \{x\}$ ausführbar ist.

→ Da $Y_2 \cup \{x\}$ nicht fristgerecht ausführbar ist, gibt es mindestens eine Frist f, so dass ($f > f_x$ und) $f+1$ Jobs vor f auszuführen sind wenn wir x zu Y_2 hinzunehmen.

Sei f^* die kleinste solche verletzte Frist. Wenn alle Jobs mit Frist $\leq f^*$ in Y_1 wären, dann wäre $Y_1 \cup \{x\}$ auch nicht ausführbar. Deshalb gibt es mindestens einen Job y mit Frist $f_y \leq f^*$ so dass $y \in Y_2 \setminus Y_1$. y kann rausgeworfen werden, d.h. $(Y_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ ist fristgerecht ausführbar. □

Greedy Alg: $S = \emptyset$

WHILE $X \neq \emptyset$ DO
- wähle $A_i \in X$ mit größtem b_i
- setze $X = X \setminus \{A_i\}$
- falls $S \cup \{A_i\}$ ausführbar, setze $S = S \cup \{A_i\}$

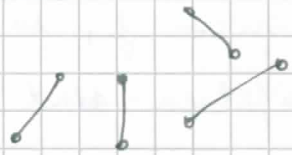
erstelle einen Schedule (z.B. von links nach rechts) der Jobs aus S.

M 20.

e.) k-Matroide und Approximationsalgorithmen

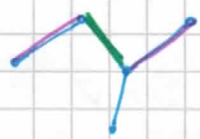
Einführung: Wir betrachten das Mengensystem von unabhängigen Kantenmengen (Matchings) in einem beliebigen fixierten Graphen. Das ist unser durchgehendes Beispiel.

Sei $G(V,E)$ ein Graph, und für eine Kantenmenge $Y \subseteq E$ sei $Y \in \mathcal{M}$ genau dann wenn Y ein Matching ist, d.h. keine zwei Kanten aus Y einen gemeinsamen Endknoten haben.



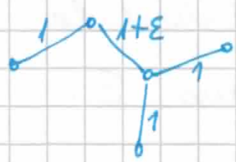
- Ist $\mathcal{M}$ ein monotones Teilmengensystem über E?
  → ja, weil jede Teilmenge eines Matchings auch ein Matching ist.

- Ist $(\mathcal{M}, E)$ ein Matroid?
  → NEIN, weil die nicht-vergrößerbaren Matchings nicht gleichviele Kanten haben:



Anders gesagt: NEIN, weil der folgende Greedy Algorithmus für max-Gewichtetes-MATCHING nicht für jede Gewichtung der Kanten optimal ist:

z.B.



Greedy – Matching – Algorithmus

$M = \emptyset$

WHILE $E \neq \emptyset$ DO

- sei $e \in E$ mit maximum Gewicht w_e; $E := E \setminus \{e\}$
- falls $M \cup \{e\}$ ein Matching, $M := M \cup \{e\}$
  (sonst verwerfe e)

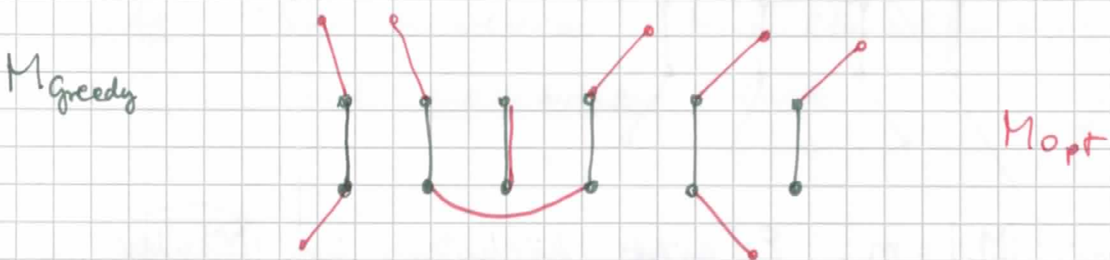
gib M aus

Unsere Frage: Wie schlecht approximiert dieser Algorithmus das maximale Gewicht über alle Matchings im Worst Case? (der Approximationsfaktor)

Behauptungen:

(a) Der Greedy Algorithmus für max-Gewichtetes-MATCHING ist 2-approximativ.

Beweis: Seien erstmal alle Gewichte gleich: $w_e = 1$
sei M_{Greedy} das Matching ausgegeben von Greedy



- M_{Greedy} bestehe aus m Kanten auf der Knotenmenge $K \subseteq V$
  klar gilt: $|K| = 2m$
- alle anderen Kanten, (auch die in einem fixierten optimalen Matching M_{opt}) haben mindestens einen Endknoten in K, und alle Knoten in K haben max. eine inzidente Kante aus M_{opt}. $\Rightarrow |M_{opt}| \leq 2m = 2 \cdot |M_{greedy}|$.

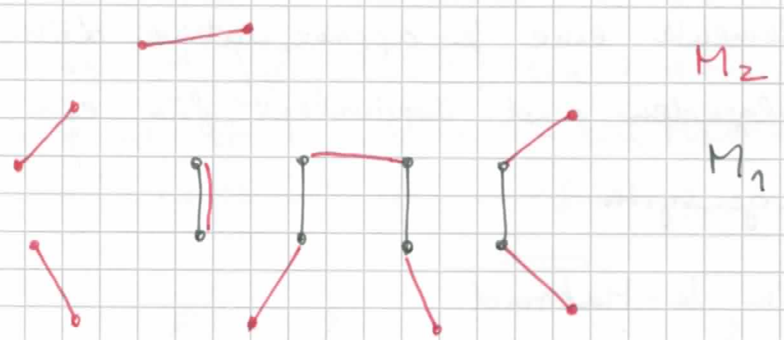
Was wenn die Gewichte w_e unterschiedlich sind?

→ jede Kante aus M_{Opt} ist entweder in M_{Greedy}, oder hat eine adjazente Kante mit höherem Gewicht in M_{Greedy} (wenn sie zwei hat, wähle eine aus)

→ jede Kante e von M_{Greedy} „gehört" in diesem Sinne zu höchstens 2 Kanten aus M_{Opt}, die beide höchstens Gewicht w_e haben. Es wurde also zu jedem Kantengewicht w_e in Greedy höchstens Gewicht $2 \cdot w_e$ in Opt eindeutig zugeordnet.

(b.) Seien M_1 und M_2 Matchings und $|M_2| > 2 \cdot |M_1|$, dann gibt es eine $e \in M_2 \setminus M_1$ so dass $M_1 \cup \{e\}$ ein Matching ist; also die 2-Ergänzungseigenschaft gilt.

Beweis: (fast dasselbe wie bei (a))



Sei $|M_1| = m$. Es gibt höchstens $2m$ Kanten in M_2, die adjazent sind mit Kanten aus M_1. Da aber $|M_2| > 2 \cdot |M_1| = 2 \cdot m$, soll es in M_2 auch mit M_1 nicht-adjazente Kanten geben; eine solche Kante kann zu M_1 hinzugenommen werden.

M 23.

(c) Sei $E' \subseteq E$. Wenn M_1 und M_2 nicht-vergrößerbare Matchings im Graphen (V, E') sind, dann gilt $|M_2| \leq 2 \cdot |M_1|$ (also mit Rollentausch auch $|M_1| \leq 2|M_2|$)

d.h. <u>die 2-Maximalitätseigenschaft</u> gilt.

<u>Beweis</u>: (wieder dasselbe)

Angenommen $|M_2| > 2 \cdot |M_1|$, könnte man M_1 mit einer Kante aus M_2 vergrößern, wie oben.

Monotone Teilmengensysteme, die (a) oder (b) oder (c) erfüllen, nennt man 2-Matroide. Hier definieren wir k-Matroide allgemein für $k \in \mathbb{N}_+$ (Matroide sind die 1-Matroide)

<u>Definition: k-Matroide</u>

Ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ heißt k-Matroid, wenn der Greedy Algorithmus für jede Gewichtung der Elemente eine k-approximative Lösung ausgibt. Die Folgenden sind äquivalent für ein monotones Teilmengensystem:

(a.) $(\mathcal{M}, X)$ ist ein k-Matroid

(b.) die <u>k-Ergänzungseigenschaft</u> gilt für $(\mathcal{M}, X)$: wenn $Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}$, und $|Y_2| > k \cdot |Y_1|$, dann gibt es eine $x \in Y_2 \setminus Y_1$, so dass $Y_1 \cup \{x\} \in \mathcal{M}$.

(falls Y_2 viel größer, dann kann Y_1 aus Y_2 ergänzt werden) (c.) <u>die k-Maximalitätseigenschaft</u> gilt: Für beliebige $Z \subseteq X$ und $Y_1, Y_2 \subseteq Z$, $Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}$, wenn Y_1 und Y_2 beide nicht-vergrößerbar sind in Z, dann

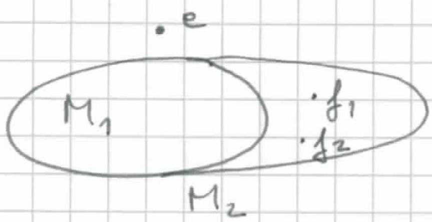
$$|Y_2| \leq k\,|Y_1|$$

(das eine ist max. um Faktor k größer als das andere)

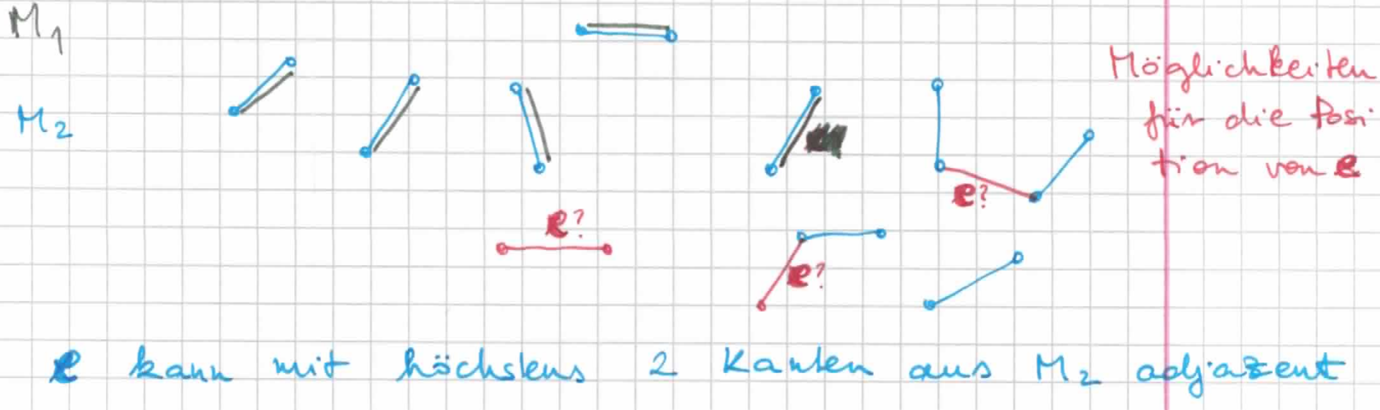
Wir hatten noch die Eigenschaft (d), Austauschbarkeit. Was ist mit k-Austauschbarkeit?

<u>Beispiel</u>: Matchings sind 2-austauschbar (2-erweiterbar):

Sei: $G(V,E)$ fixiert; seien $M_1 \subseteq M_2$ Matchings, und $M_1 \cup \{e\}$ auch ein Matching.



dann gibt es (höchstens) 2 Kanten $f_1, f_2 \in M_2 \setminus M_1$ so dass $(M_2 \setminus \{f_1, f_2\}) \cup \{e\}$ ein Matching ist.
(vielleicht ist $M_2 \cup \{e\}$ auch ein Matching, oder es reicht nur eine Kante zu entfernen)



e kann mit höchstens 2 Kanten aus M_2 adjazent sein. Nach dem Entfernen dieser höchstens 2 Kanten, werden die verbleibenden Kanten in M_2 mit e ein Matching bilden.

Definition:

(d.) Ein monotones Teilmengensystem $(\mathcal{M}, X)$ ist <u>k-austauschbar</u> (k-erweiterbar), wenn für je zwei unabhängige Mengen $Y_1 \subset Y_2$ und für jedes Element $x \notin Y_2$ gilt: wenn $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig ist, dann gibt es eine Teilmenge $T \subseteq Y_2 \setminus Y_1$ von höchstens k Elementen so dass $(Y_2 \setminus T) \cup \{x\}$ unabhängig ist.

<u>Theorem</u>: Wenn $(\mathcal{M}, X)$ k-austauschbar ist, dann ist es ein k-Matroid. Die Umkehrung gilt nicht immer (für $k > 1$)

d.h. für $k > 1$ $\quad (d) \Rightarrow (a)$

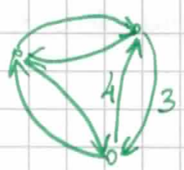
aber $(a) \not\Rightarrow (d)$ (Beweis im Skript)

<u>Beispiel</u>: MAX-TSP

<u>Eingabe</u>: Vollständiger gerichteter Graph $\vec{K}_n(V, \vec{E})$ mit Kantengewichten w_e

$(V = \{1, 2, \ldots, n\} \quad (i,j) \in E$ <u>und</u> $(j,i) \in E)$

<u>Ausgabe</u>: Eine Rundreise (Hamiltonscher Kreis) mit <u>maximaler</u> Länge.



→ die Grundmenge besteht aus allen gerichteten Kanten:

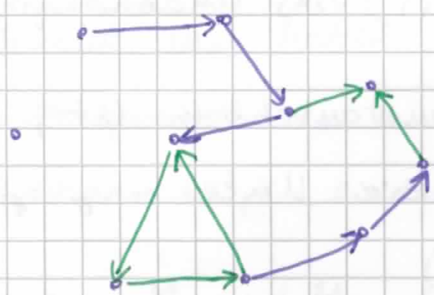
$X = \vec{E}$

Wir wollen, dass die <u>nicht-vergrößerbaren</u> unabhängigen Kantenmengen genau die Rundreisen sind. Welche sollen dann die unabhängigen Mengen $(Y \in \mathcal{M})$ sein?

M 26.

→ für eine Menge von Kanten $Y \subseteq M$ (ist unabhängig),

wenn Y aus Knoten-disjunkten gerichteten Pfaden besteht, oder eine Rundreise ist.



unabhängig

nicht-unabhängig

<u>Behauptung:</u> Dieses Mengensystem (M, E) ist 3-erweiterbar. 3-austauschbar

Daraus folgt: Der Greedy-Algorithmus berechnet eine 3-approximative Lösung für MAX-TSP.

Warum ist (M, E) 3-austauschbar?

Mit dem Entfernen von höchstens 3 Kanten aus einer beliebigen unabhängigen Menge Y kann eine beliebige Kante $e \in E \setminus Y$ zu Y hinzugenommen werden so dass das Ergebnis aus knotendisjunkten Pfaden besteht: Ein worst-case Beispiel:

Y