Die Entscheidungsversion von RUCKSACK ist NP-vollständig

DP 5.

Ein exakter Algorithmus für ganzzahlige Gewichte $g_i \in \mathbb{N}$ mit dynamischer Programmierung

→ bezeichne $W(i, g)$ den größten Wert, so dass eine Bepackung aus den Objekten $\{1, 2, \dots, i\}$ mit Gewicht genau g und diesem Wert existiert

(für jede $i = 0, 1, 2, \dots, n$ und $g = 0, 1, 2 \dots G$)

Wie berechnet man $W(i,g)$ aus früheren $W(i',g')$ Werten?
$i' \leq i$ und $g' \leq g$

→ Wir stellen eine Rekursionsgleichung für $W(i, g)$ auf:

$$W(i,g) = \max \{ W(i-1, g),\ w_i + W(i-1, g-g_i) \}$$

$W(i-1, g)$: Objekt i nicht hinzugenommen

$w_i + W(i-1, g-g_i)$: Objekt i hinzugenommen

die Basisfälle sind

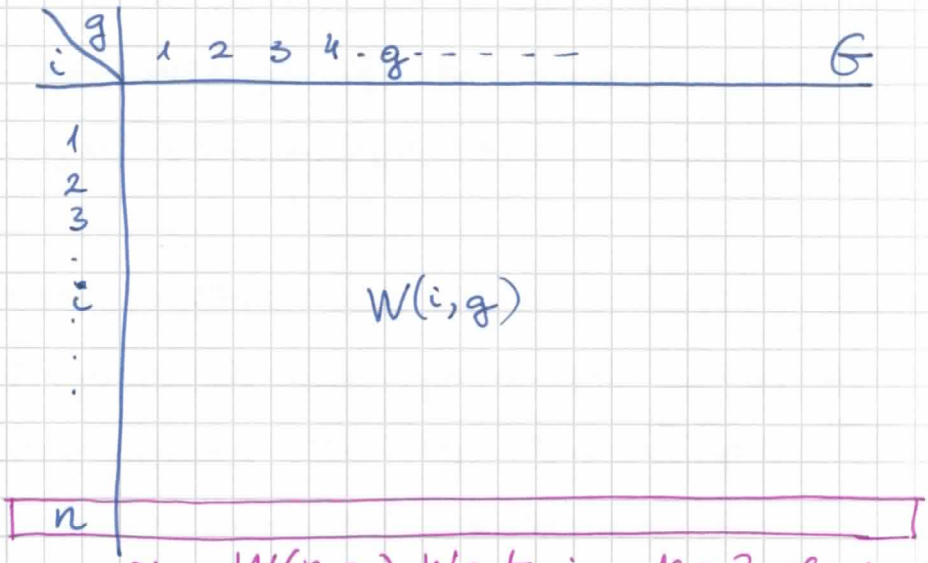
$W(0,0) = 0$

$W(0, g) = -\infty$ wenn $g \neq 0$

$W(i, g) = -\infty$ für $g < 0$

(setze $-\infty$ für unmögliche Fälle bei Maximierungsproblemen)

DP 6.



Der größte W(n,g) Wert in der Zeile n ist optimal.

→ die Tabelle von W(i,g) Werten berechnet

und speichert der Algorithmus von oben nach unten

~~und speichert sie in der Tabelle~~

- initialisiere
- For i = 1 to n Do
  For g = 0 to G Do
  $W(i,g) = \max\{W(i-1,g), w_i + W(i-1,g-g_i)\}$

→ Laufzeit: $O(W \cdot n)$ (W: G)

→ Wie wird eine optimale Bepackung berechnet?

Wenn mit jedem W(i,g) noch ein Zeiger auf W(i-1,g) oder auf W(i-1,g-g_i) (um W(i,g) zu realisieren) gesetzt wird, dann kann der Algorithmus am Ende vom maximalen W(n,g) ausgehend, in O(n) Schritten mit Backtracking die Objekte in einer optimalen Bepackung finden.

Beachte, dass erst am Ende klar wird, welche Zeiger/Objekte nützlich sind!

RUCKSACK ist NP-vollständig, und jetzt haben wir doch einen Algorithmus mit Laufzeit $O(G \cdot n)$. Ist das kein Widerspruch?

Ist dieser Algorithmus polynomiell?

→ Beachte, dass $O(G \cdot n)$ allgemein keine polynomielle Laufzeit ist, insbesondere ist G eine exponentielle Funktion von $\log G$, dem entsprechenden Term in der Eingabelänge.

Wenn z.B. $G = 2^{100}$, dann kann die Eingabelänge $\sum \log g_i = O(n \cdot 100)$ sein, die Laufzeit jedoch $\Omega(n \cdot 2^{100})$.

Der Alg. kann praktikabel sein, wenn G relativ klein ist.

Definition: Ein Algorithmus heißt pseudopolynomiell, wenn seine Laufzeit $O(\text{Poly}(n, Z))$ ist, wobei n die Eingabelänge, und Z (in Absolutwert) die größte Zahl in der Eingabe ist.

Eine präzisere Definition von „pseudopolynomiell":

Der Term $n \cdot G$ wäre polynomiell, wenn die Kodierung der Zahl G in der Eingabe nicht $\log G$-lang, sondern G-lang wäre!

Also, wenn die Eingabe unär kodiert wäre

(Bsp. $10 = \underbrace{1111111111}_{10}$ ① $\quad 10 = \underbrace{1010}_{\lceil \log 10 \rceil}$ ②)

(Dann wäre auch die ganze Kodierung $\sum_{i=1}^{n} w_i + \sum_{i=1}^{n} g_i$ lang statt $\sum_i \log w_i + \sum_i \log g_i + \log G$)

Definition (pseudopolynomiell): Ein Algorithmus heißt **pseudopolynomiell**, wenn seine Laufzeit polynomiell ist in der Eingabelänge, wenn jede Instanz unär kodiert ist.

Dynamische Programmierung (Zusammenfassung)

Das Problem (die Instanz) wird in kleinere Teilprobleme aufgebrochen. Elementare (die kleinsten) Teilprobleme sind einfach zu lösen. Die Optimumwerte der Teilprobleme werden in einer 'Tabelle' gespeichert, und für die Lösung schwierigerer Teilprobleme immer wieder verwendet, mit Hilfe einer Rekursionsgleichung (bzw. rekursiven Definition).

Wann wird dynamische Programmierung verwendet?

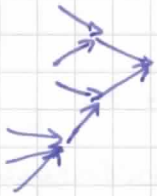
- eine optimale Lösung eines Problems enthält optimale Lösungen für seine Teilprobleme; (optimale Teilstruktur)
- relativ "wenige" Teilprobleme, die von einem rekursiven Algorithmus immer wieder berechnet wären; (überlappende Teilprobleme)

Vergleich: Dynamische Programmierung vs. Divide & Conquer

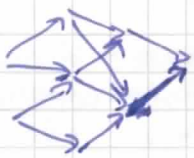
Modelliere die Lösung von Teilproblemen durch einen gerichteten azyklischen Graphen (DAG - directed acyclic graph)

Eine Kante $P_i \rightarrow P_j$ bedeutet, dass die Lösung von P_i zur Lösung von P_j unmittelbar verwendet wird.

- in D&C ist der Graph ein Baum (Rekursionsbaum), die Teillösungen werden oft rekursiv (top-down) berechnet und nicht gespeichert



- in Dyn Prog ist der Graph ein DAG. Die Teillösungen werden mehrfach verwendet und deshalb gespeichert. Sie werden bottom up berechnet.



Die Minimierung des Speicherplatzbedarfs spielt eine wichtige Rolle.

(Tendenziell gilt: in der Rekursionsgleichung sind die Größen der Teilprobleme nicht um einen Faktor (wie bei D&C), sondem um eine additiven Konstante kleiner.)

Ein FPTAS für RUCKSACK

für n Objekte mit Gewichten $g_1\ g_2 \ldots g_n \in \mathbb{R}_+$
und Werten $w_1\ w_2 \ldots w_n \in \mathbb{R}_+$
und Gewichtsschranke $G \geq g_i\ \forall i$

wird eine Teilmenge der Objekte mit Gesamtgewicht $\leq G$
und Gesamtwert $\geq \frac{OPT}{1+2\varepsilon}$ ausgegeben

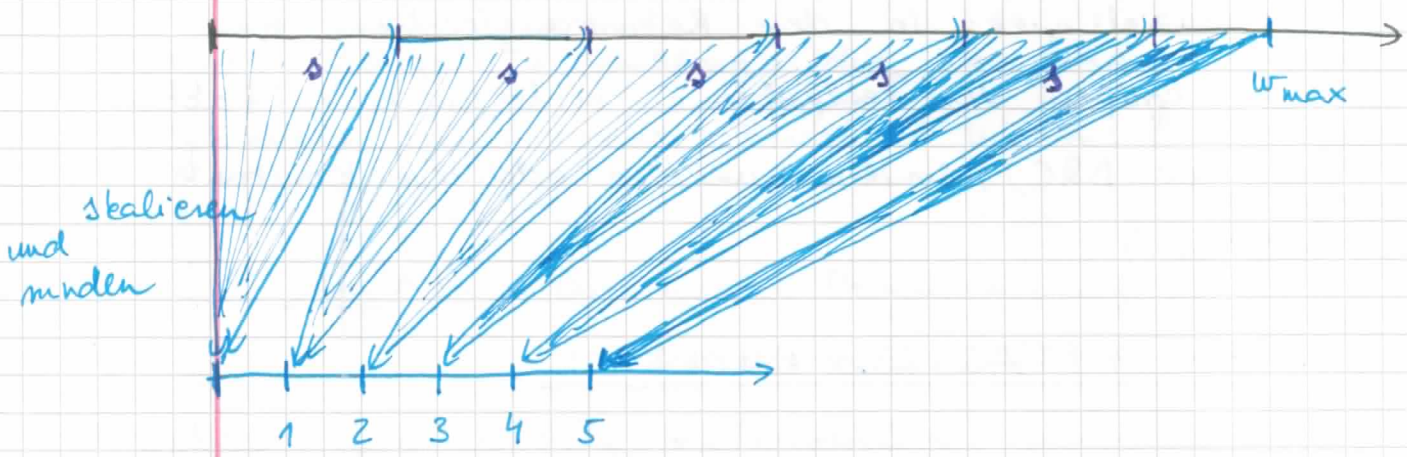
DP 10.

Ausgangspunkt: es gibt einen Algorithmus mit dynamischer Programmierung für RUCKSACK mit Laufzeit $O(n \cdot W)$ für $W = \sum_i w_i$ bei ganzzahligen Werten w_i.

(also einen schnellen Algorithmus, wenn es insgesamt wenige mögliche verschiedene Werte (bzw. Summen von Werten) gibt)

Wir nutzen diesen Algorithmus um ein FPTAS für beliebige (insb. beliebig große) Werte zu entwickeln.

Idee: jeder Wert w_i wird auf das nächste Vielfache eines geeigneten s abgerundet, damit es wenige verschiedene Werte gibt (und: Wertesummen)



w_i wird skaliert auf $\frac{w_i}{s}$ und abgerundet $\left\lfloor \frac{w_i}{s} \right\rfloor$

wir berechnen eine optimale Lösung für die Werte $\underline{w_i} = \left\lfloor \frac{w_i}{s} \right\rfloor$ (z.B. $\underline{w_{max}} = 5$ weil $w_{max} = 5.6\,s$)

Wir müssen mit der Wahl von s vorsichtig sein:

→ s soll klein genug sein um eine gute Approximation zu ermöglichen

→ s soll groß genug sein um einen schnellen Algorithmus (durch nur wenige mögliche $\underline{w}_i$ Werte) zu erhalten

- um s richtig zu setzen, brauchen wir, dass der Fehler wegen Abrundungen, in der Lösung höchstens $\varepsilon \cdot OPT(I)$ ist. Wir brauchen dafür eine Schätzung von $OPT(I)$.
- wir nutzen $OPT(I) \geq w_{max}$ als untere Schranke von $OPT(I)$ und von dem Fehler
- der Fehler wegen Abrundung ist $\leq s$ für ein Objekt, und $\leq s \cdot n$ für alle Objekte im Rucksack

⇒ s sollte so gewählt werden, dass

$$\text{(Fehler} \leq) \; s \cdot n \leq \varepsilon \cdot w_{max} \; (\leq \varepsilon \cdot OPT(I))$$

also, sei $s = \frac{\varepsilon \cdot w_{max}}{n}$

FPTAS für RUCKSACK (ε sei fixiert)

Eingabe: Gewichte $g_1 \; g_2 \; \dots \; g_n \leq G$
Werte $w_1 \; w_2 \; \dots \; w_n$

1. setze $s = \frac{\varepsilon w_{max}}{n}$
2. sei $\underline{w}_i = \left\lfloor \frac{w_i}{s} \right\rfloor$ für jedes Objekt i
3. berechne die exakt optimale Lösung für die (gerundete) Instanz $(g_1 \; g_2 \; \dots \; g_n, \underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n)$ mit Dynamischer Programmierung
4. sei $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ die gewählte Objektmenge

gib B aus (mit Wert $\sum_{i \in B} w_i$)

Wir zeigen, dass wir tatsächlich ein FPTAS angegeben haben:

DP12. **Theorem 1:** Dieser Algorithmus hat Laufzeit $O\left(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon}\right)$ (polynomiell auch in $\frac{1}{\varepsilon}$)

Wamm?

Die Laufzeit des pseudopolynomiellen Algorithmus (Schritt 3.) ist $O(n \cdot W_{\text{skaliert}})$, wobei

W_{skaliert} ← Gesamtwert der skalierten Objekte

$$W_{\text{skaliert}} \leq n \cdot \underline{w_{max}} \leq n \cdot \frac{w_{max}}{s} = n \cdot \frac{w_{max} \cdot n}{\varepsilon \cdot w_{max}} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot n^2$$

$$\Rightarrow n \cdot W_{\text{skaliert}} \leq n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

□

Theorem 2: Der Algorithmus ist $(1+2\varepsilon)$-approximativ.

Beweis: Sei $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ die Bepackung ausgegeben vom FPTAS in Schritt 3., und B_{OPT} eine optimale Bepackung

$$OPT(I) = \sum_{i \in B_{OPT}} w_i = \sum_{i \in B_{OPT}} s \cdot \frac{w_i}{s} \leq \sum_{i \in B_{OPT}} s \left(\left\lfloor \frac{w_i}{s} \right\rfloor + 1 \right) \leq$$

$$\leq s \cdot \sum_{i \in B_{OPT}} \left\lfloor \frac{w_i}{s} \right\rfloor + s \cdot n \leq s \cdot \sum_{i \in B} \left\lfloor \frac{w_i}{s} \right\rfloor + s \cdot n \leq$$

($= \frac{w_i}{s}$)

↓ weil B optimal für die gerundeten Werte w_i ist

$$\leq s \cdot \sum_{i \in B} \frac{w_i}{s} + s \cdot n = \sum_{i \in B} w_i + \varepsilon \cdot w_{max} \leq PTAS(I) + \varepsilon OPT(I)$$

$$\Rightarrow (1-\varepsilon) OPT(I) \leq PTAS(I)$$

$$\frac{OPT(I)}{1+2\varepsilon} \quad \text{für } \varepsilon < \frac{1}{2}$$

□

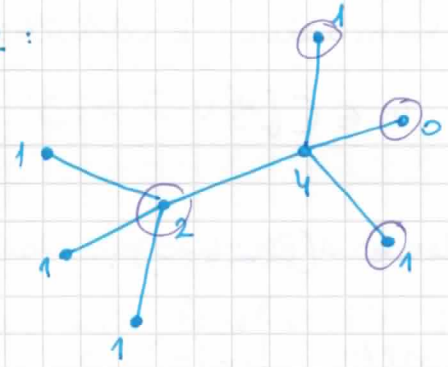
Dynamische Programmierung auf Bäumen

Beispiel: gewichtetes Vertex Cover auf Bäumen.

Eingabe: Ein Baum $T(V,E)$ (ungerichtet) mit einer Gewichtung der Knoten v_0 für jeden $v \in V$

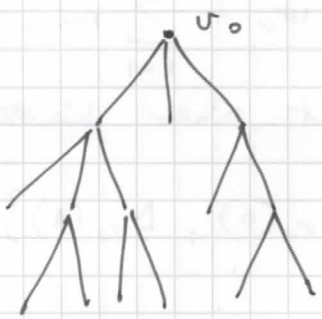
Ausgabe: Eine Knotenüberdeckung mit minimalem Gesamtgewicht

Beispiel:



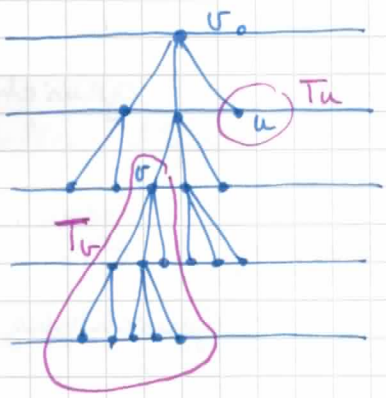
Ein effizienter Algorithmus mit dynamischer Programmierung

- wähle einen beliebigen Knoten $v_0 \in V$ als Wurzel;
  jetzt hat jeder Knoten außer v_0 einen Vater;
  die Knoten ohne Kinder heißen Blätter



DP. 14.

- für jeden $v \in T$ sei T_v der Teilbaum von T mit Wurzel v



- angefangen mit der tiefsten Ebene (bottom-up) berechnen wir für jeden Knoten v zwei Werte bezüglich sein Teilbaum T_v:

$D_v(0)$:= Gewicht einer minimalen Knotenüberdeckung C_v von T_v mit $v \notin C_v$

$D_v(1)$:= Gewicht einer minimalen Knotenüberdeckung C_v von T_v so dass $v \in C_v$

- Elementare Teilprobleme (Blätter):

für Blätter v gilt $D_v(0) = 0$ $D_v(1) = w_v$

- Rekursionsgleichung:

falls v die Kinder $u_1, u_2, \ldots, u_m$ hat, gilt

$$D_v(0) = \sum_{i=1}^{m} D_{u_i}(1)$$

$$D_v(1) = w_v + \sum_{i=1}^{m} \min\{D_{u_i}(0), D_{u_i}(1)\}$$

- das minimale Gewicht einer Knotenüberdeckung:

$$\min\{D_{v_0}(0), D_{v_0}(1)\}$$

Um anschließend eine Knotenüberdeckung mit minimalem Gewicht zu finden, muss der Algorithmus mit Breiten- oder Tiefensuche von der Wurzel nach unten laufen (top-down):

Sei $C \subset V$ die gesuchte Knotenüberdeckung, und sei v der Vater von u

→ falls $v \in C$ (oder $u = v_0$), dann

wir dürfen u hinzunehmen

$$C := \begin{cases} C \cup \{u\} & \text{falls } D_u(1) \leq D_u(0) \\ C & \text{falls } D_u(1) > D_u(0) \end{cases}$$

→ falls $v \notin C$

wir müssen u hinzunehmen

$$C := C \cup \{u\}$$

Auf Bäumen und Baum-ähnlichen Graphen (sog. Graphen mit beschränkter Baumweite) sind viele Optimierungsprobleme mit dynamischer Programmierung effizient lösbar.

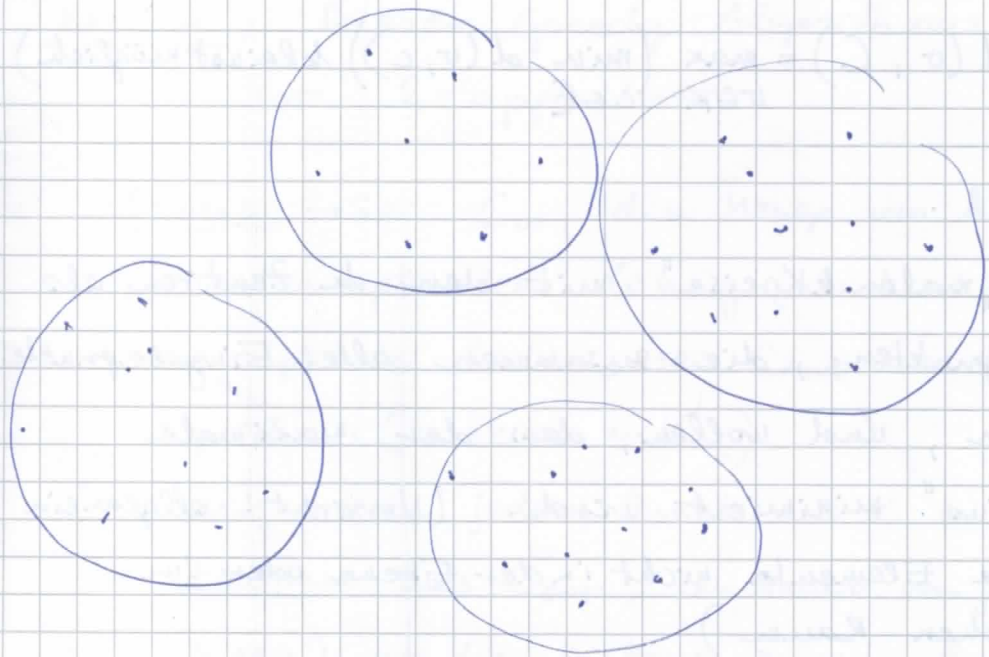
(Die $D_v(0)$ $D_v(1)$ Werte für alle Knoten v bilden die 'Tabelle'; man kann an $\{D_v(0), D_v(1)\}$ auch als an eine kleine Tabelle im Knoten v denken.)

LOKALE SUCHE

Cluster Probleme (allgemein)

In der Eingabe sind eine Menge K von Punkten / Elementen mit einer Metrik (also Distanzwerten zwischen je zwei Punkten) gegeben.

Das Ziel ist, „ähnliche" Elemente, also die sich nah aneinander befinden, zu einem sog. Cluster machen.



Anwendungen von Clustering: Finde Ähnlichkeiten/Unterschiede in großen Datenmengen, wie Webseiten, Kunden, Produkte, Wähler die gemäß Inhalt, Verhalten, Präferenzen gruppiert werden sollen.

Oder: örtliche Clustering, z.B. positioniere deine Supermärkte optimal

LS2.

a.) Das k-CENTER und das k-MEDIAN Problem

(Minimierungsprobleme)

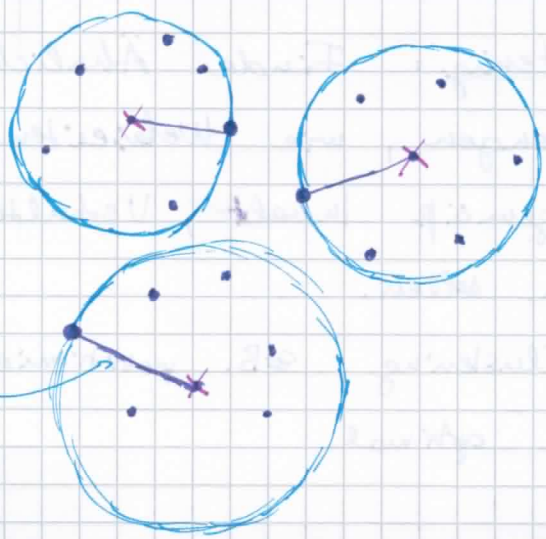
k-CENTER

Eingabe: eine Menge K von Punkten mit einer Metrik (Distanzen) $d: K \times K \to \mathbb{R}_+$ und eine Zahl k

Ausgabe: eine Menge $C \subseteq K$ von k Zentren, so dass die maximale Distanz vom nächstliegenden Zentrum über alle Punkte, minimiert wird

$$\left(\max_{v \in K} d(v, C) = \max_{v \in K} \left(\min_{c \in C} d(v, c) \right) \text{ kleinstmöglich} \right)$$

Intuitiv: Wir „malen k Kreise" mit den k Zentren als Mittelpunkten, die zusammen alle Eingabepunkte decken, und wollen, dass der maximale „Radius" minimiert wird. (Vorsicht! allgemein sind die Elemente nicht in der Ebene oder im Euklidschen Raum)



ein maximaler Radius

Ein greedy Algorithmus für k-CENTER

- sei $v_1 \in K$ ein beliebiger Eingabepunkt,
  setze $C = \{v_1\}$

- FOR $i = 2$ TO k DO

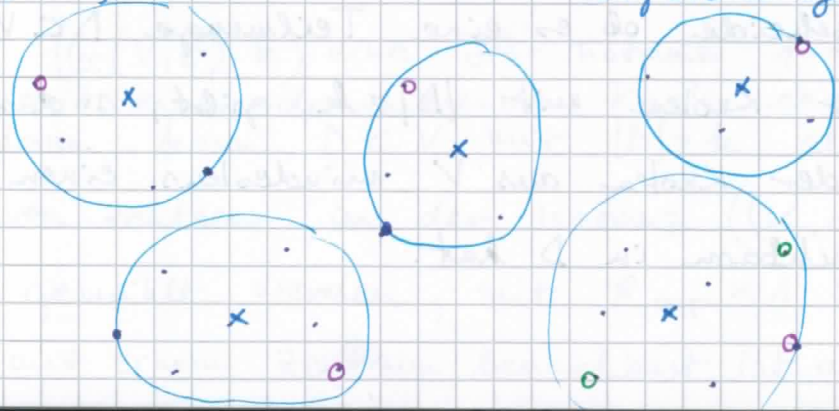
  - sei $v_i \in K$ ein Punkt mit maximaler $d(v, C)$
    (~~Mindest~~)Distanz vom nächstliegenden eigendeinem Zentrum aus C
    (ein Punkt der aktuell den maximalen Radius bestimmt)

  - setze $C = C \cup \{v_i\}$

Theorem: Dieser Greedy Algorithmus für k-CENTER ist 2-approximativ.

Beweis: → Sei C_{OPT} die Menge von k Zentren in einer fixierten optimalen Lösung (markiert mit $*$) und R_{OPT} der optimale Radius; sei C_{ALG} die k Zentren vom Greedy Algorithmus (markiert mit $\circ$)

- wir weisen jeden Punkt aus K zu einem nächstliegenden Zentrum aus C_{OPT}; innerhalb von jedem solchen Cluster (Kreis) ist die Distanz zweier Punkte $\leq 2 \cdot R_{OPT}$ (weil beide höchstens um R_{OPT} entfernt vom Cluster-Zentrum sind, und die Dreiecksungleichung gilt.



LS 4.

FALL 1. C_{ALG} hat in jedem Cluster ein Zentrum

⇒ dann hat jeder Punkt höchstens Distanz $2 \cdot R_{OPT}$ von einem Zentrum in C_{ALG}

FALL 2. C_{ALG} hat (mind.) 2 Zentren q und r im selben Cluster, wobei zuerst q dann später r vom Greedy Alg. ausgewählt wurde. Dann war damals r ein Punkt mit maximaler Distanz zum nächstliegenden ~~irgendeinem~~ Zentrum aus C_{ALG}, aber diese war nicht größer als

$$d(q, r) \leq 2 R_{OPT}$$ □

Theorem: k-CENTER ist nicht effizient um Faktor $c < 2$ approximierbar, d.h. der Greedy Algorithmus hat den bestmöglichen Approximationsfaktor unter effizienten Algorithmen.

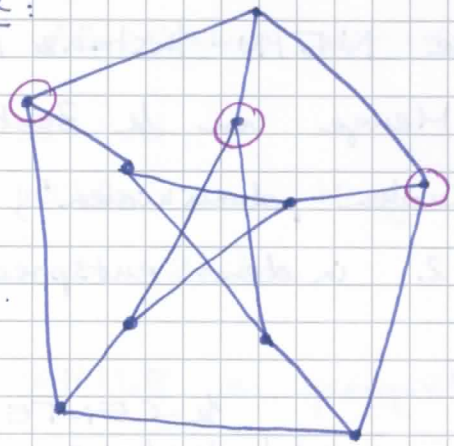
Für den Beweis brauchen wir das folgende schwierige Problem:

DOMINATING SET (Entscheidungsversion)

Eingabe: ein Graph $G(V, E)$, und eine Zahl k

Ausgabe: entscheide ob es eine Teilmenge $D \subseteq V$ der Knoten mit $|D| = k$ gibt, sodass jeder Knoten aus V mindestens einen Nachbarn in D hat.

Beispiel:



D

Die Entscheidungsversion von DOMINATING SET ist NP-vollständig.

Wir zeigen, dass k-CENTER nicht besser als 2 approximierbar ist; durch Reduktion vom DOMINATING SET:

Angenommen, es gibt einen effizienten c-approximativen Algorithmus für k-CENTER mit $c < 2$.

Sei $G(V,E)$, k eine beliebige Eingabe für DOMINATING SET

Wir definieren eine Eingabe (eine spezielle Eingabe) für k-CENTER, und geben sie unserem (hypothetischen) Algorithmus:

Sei k dieselbe Zahl in beiden Eingaben.

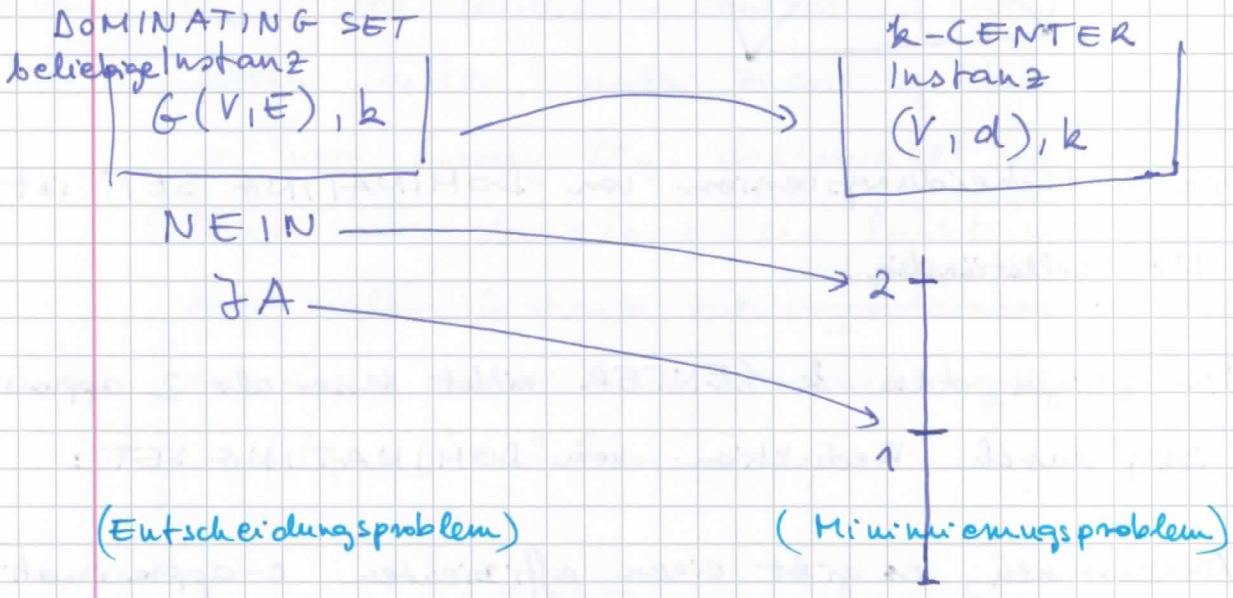
Sei $K = V$ die Menge der Punkte, und die Metrik sei

$$d(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{u,v\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

(prüfe, dass diese Distanzen eine Metrik definieren!)

→ Falls $(G(V,E), k)$ eine JA-Instanz für DOMINATING SET, mit einer dominierenden Knotenmenge $D \subseteq V$, dann kann $D \subseteq V$ mit $|D| = k$ als die Menge von Zentren in der Instanz $((K,d),k)$ für k-CENTER gewählt werden, mit $R_{OPT} = 1$ (weil jeder Knoten mit einem Zentrum benachbart ist also Distanz 1 von D hat).

→ Falls $(G(V,E), k)$ eine NEIN-Instanz ist, dann gibt es keine Menge von k Zentren, die zusammen alle Knoten „dominieren", und deshalb $R_{OPT} = 2$ in der entsprechenden k-CENTER Instanz



Ein besser als 2-approximativer Algorithmus für k-CENTER kann somit DOMINATING SET entscheiden.

Dies ist effizient nicht möglich, angenommen $P \neq NP$

k-MEDIAN (ein anderer Typ von Clustering)

Eingabe: eine Menge K (von Punkten) mit einer Metrik (Distanzen) $d: K \times K \to \mathbb{R}_+$ und eine Zahl k

Ausgabe: eine Menge $M \subset K$ von k Zentren, so dass die Summe der Distanzen vom nächstliegenden Zentrum über alle Punkte minimiert wird

$$\left(\sum_{v \in K} d(v, M) = \sum_{v \in K} \left(\min_{c \in M} d(v, c) \right) \text{ kleinstmöglich} \right)$$

Ein Algorithmus mit Lokaler Suche für k-MEDIAN

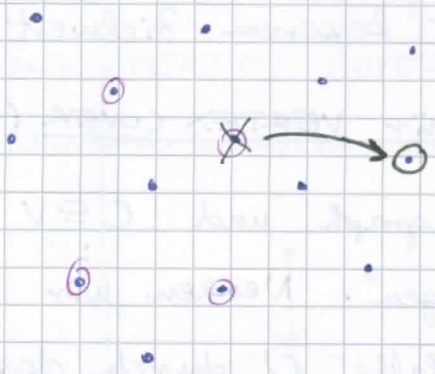
→ sei $i = 0$

→ wähle eine Menge M^0 von beliebigen k Punkten als Zentren

→ WHILE es geeignete $w \in M^i$ und $u \notin M^i$ gibt, DO:
ersetze ein $w \in M^i$ durch einen $u \notin M^i$
falls dies zu kleinerer Summe der Distanzen führt (d.h. die Zielfunktion reduziert)

$$M^{i+1} = (M^i \setminus \{w\}) \cup \{u\}$$
$$i = i+1$$

(Wir sagen, dass die Lösung M^{i+1} eine benachbarte Lösung von M^i ist weil sie nur „ein wenig unterschiedlich" sind)



Theorem: (ohne Beweis) Dieser Algorithmus ist 5-approximativ für k-MEDIAN.

LS 8.

b.) Lokale Suche, Definition

Lernbeispiel: minVERTEX COVER

ein Algorithmus mit lokaler Suche für VERTEX COVER

- sei $G(V,E)$ der Eingabegraph
- sei $C^0 = V$ die Knotenüberdeckung am Anfang und $i = 0$
- WHILE es gibt $v \in C^i$ so dass $C^i \setminus \{v\}$ noch eine Knotenüberdeckung

  sei $C^{i+1} = C^i \setminus \{v\}$

  $i = i+1$

Lokale Suche: Wechsle zu einer benachbarten (wenig veränderten) besseren Lösung, so lange es solche gibt mit besserem Zielwert

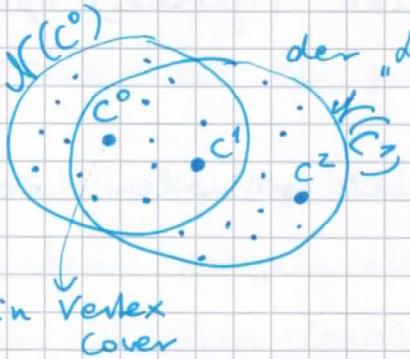
Die entsprechende Nachbarschaft-Definition für VERTEX COVER (für diesen Algorithmus)

Sei $G(V,E)$ ein Eingabegraph und $C \subseteq V$ und $C' \subseteq V$ seien beide Knotenüberdeckungen. Nennen wir C und C' benachbarte Lösungen, falls C' durch das Hinzufügen oder das Entfernen eines Elements aus C entsteht.

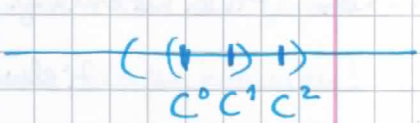
Die Nachbarschaft $N(C)$ der Lösung C besteht aus allen benachbarten Lösungen, also $C' \in N(C)$ (und $C \in N(C')$) falls sie benachbart sind.

Die Nachbarschaft einer Lösung ist also eine Menge von ähnlichen Lösungen.

[eine abstrakte Darstellung von Nachbarschaften



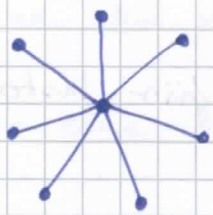
noch abstraktere Darstellung in 1D



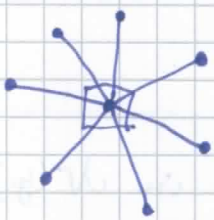
]

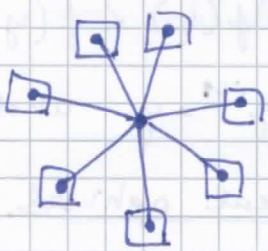
Was für eine Lösung kann so ein Algorithmus finden?
Anders: wie sind die Lösungen für die es keine bessere benachbarte Lösung gibt?

Beispiel: sei der Sternegraph die Eingabe für min-VERTEX COVER, mit den oben definierten Nachbarschaften der Knotenüberdeckungen.



Von welchen Lösungen kann kein weiterer Knoten entfernt werden?

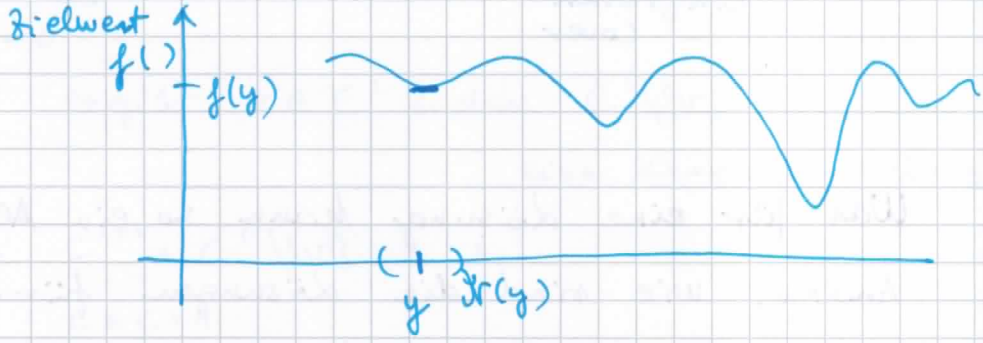




Eine solche Lösung heißt lokal optimal (weil es keine bessere in ihrer Umgebung (Nachbarschaft) gibt).

Eine lokal optimale Lösung kann, je nach Problem, viel schlechter sein als eine (global) optimale Lösung.

Abstrakte Darstellung einer lokal optimalen Lösung eines Minimierungsproblems:



Definition: Lokale Suche (allgemein)

Sei ein Minimierungsproblem zu lösen, wobei zu jeder Lösung y eine Umgebung $N(y)$ benachbarter Lösungen definiert ist.

Steilste Lokale Suche

→ sei y^0 eine Lösung für Instanz x

$i=0$

→ WHILE y^i nicht lokal optimal DO

- bestimme ein $y \in N(y^i)$ so dass

$$f(y) < f(y^i)$$

- setze $y^{i+1} = y$ und $i := i+1$

(Eine Lösung y ist lokal optimal, falls es in $N(y)$ keine Lösung mit kleinerem Zielwert gibt.)

Die Definition ist analog für Maximierungsprobleme.

Wie viele Verbesserungsschritte werden gebraucht bis (wenigstens) eine lokal optimale Lösung gefunden wird?

Im VERTEX COVER Beispiel → maximal n-1 Verbesserungen (wir hatten eigentlich einen Greedy Algorithmus)

bei den meisten (echten) Algorithmen mit lokaler Suche reichen polynomiell viele Schritte allgemein nicht aus, um in einem lokalen Optimum anzukommen!

c.) Unterschiede zu Greedy Algorithmen

(lokale Suchverfahren sind ähnlich zu Greedy Algorithmen da die Lösung in jedem Schritt lokal verändert wird)

Unterschiede sind:

→ In einem Greedy Verfahren wird eine Lösung aus Teillösungen iterativ aufgebaut (es wird meistens nicht mit einer kompletten Lösung angefangen).

→ es wird immer eine beste Nachbarlösung ausgewählt

→ Tendenziell: die Anzahl der Schritte entspricht der Anzahl der Elemente in der Eingabe oder in der Lösung ⇒ schneller Algorithmus

→ In einer **Lokalen Suche** hat man in jedem Schritt eine komplette Lösung

→ die Suche wird nicht unbedingt mit dem besten, sondem nur mit einem besseren Nachbarn fortgesetzt.

→ Da die Anzahl aller Lösungen exponentiell ist, wird nicht garantiert dass man „schnell" ein lokales Optimum findet.

(Falls die Anzahl der möglichen Werte von f klein ist (wie beim VERTEX COVER), ist die strikte lokale Suche schnell fertig, sonst nicht unbedingt (wie bei k-MEDIAN))

→ wegen der großen Anzahl möglicher Lösungen wird eine Anfangslösung häufig durch Heuristiken oder randomisiert ausgewählt.

Beispiele für Nachbarschaften

→ Wir hatten die Nachbarschaften im k-MEDIAN Problem so gewählt:

Eine Menge $M \subset K$ von Zentren sei mit einer anderen Menge $M' \subset K$ von Zentren benachbart, wenn

$$M' = (M \setminus \{w\}) \cup \{u\}$$

d.h. irgendein Zentrum w wird durch einen Punkt $u \in K$ ersetzt.

→ Im VERTEX COVER Beispiel waren C und C' benachbart genau dann wenn $C' = C \cup \{v\}$ oder $C' = C \setminus \{v\}$ für irgendein $v \in V$

Definition: k-Flip Nachbarschaft. Wenn jede Lösung y einem n-dimensionalen Vektor über $\{0,1\}$ entspricht (also $\forall y \in \{0,1\}^n$), dann ist die k-Flip Nachbarschaft einer Lösung y

$$N_k(y) = \{ y' \in \{0,1\}^n \mid y' \text{ Lösung, und Hamming Distanz}(y,y') \leq k \}$$

Im Fall von k-MEDIAN bzw. VERTEX COVER:
Für welche k sind die oben definierten Nachbarschaften k-Flip Nachbarschaften und warum?

Im Folgenden untersuchen wir noch diese Fragen:

d.) Wie gut approximiert ein lokales Optimum das globale Optimum?

e.) Können wir zumindest ein lokales Optimum effizient berechnen, bzw. wann/warum sind wir ziemlich sicher, dass dies (für ein gegebenes Problem) nicht geht?

f.) Wenn ein lokales Optimum nicht effizient berechenbar ist, was ist zu tun? Kann man approximieren, und in welchem Sinne?

g.) Kann es hilfreich sein, während einer lokalen Suche manchmal Verschlechterungen zuzulassen?