

GREEDY ALGORITHMEN

Matroide

Beispiel: Kreisfreie Kantenmengen eines Graphen

Sei $G(V, E)$ festgelegt.

Wir nennen $Y \subseteq E$ **kreisfrei**, falls $G(V, Y)$ keinen Kreis enthält.

Eigenschaften der kreisfreien Kantenmengen von G :

Falls $Y \subseteq E$ kreisfrei ist, und $Y' \subset Y$, dann ist Y' auch kreisfrei.

(Die kreisfreien Kantenmengen bilden ein **monotones Teilmengensystem**.)

Maximalitätseigenschaft: in jeder fixierten Kantenmenge $Z \subseteq E$ haben alle *nicht-vergrößerbaren* kreisfreien Kantenmengen $Y \subseteq Z$ dieselbe Grösse.

Ergänzungseigenschaft: Seien Y_1 und Y_2 kreisfreie Kantenmengen, und $|Y_1| < |Y_2|$, dann gibt es ein $e \in Y_2 \setminus Y_1$, so dass $Y_1 \cup \{e\}$ auch kreisfrei ist.

Mengensysteme

Ein Mengensystem ist eine Menge von Teilmengen einer endlichen Grundmenge X .

zB. die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge *aller* Teilmengen von X .

Definition: Ein monotones Teilmengensystem über der *endlichen* Menge X ist ein Paar (\mathcal{M}, X) so dass

- $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$
(die Elemente von \mathcal{M} sind die 'gewünschten' Teilmengen von X)
- aus $Y \in \mathcal{M}$ und $Y' \subset Y$ folgt $Y' \in \mathcal{M}$.
(die Teilmengen einer gewünschten Menge sind auch gewünschte Mengen)

Wir nennen die Mengen von \mathcal{M} unabhängig (statt 'gewünscht').

Der Greedy Algorithmus für monotone Mengensysteme

MAXIMIERUNG-PROBLEM für monotone Mengensysteme:

Eingabe: ein monotones Teilmengensystem (\mathcal{M}, X) über der Menge X , und Gewichte $w_x \geq 0$ für jedes $x \in X$

Ausgabe: Bestimme eine unabhängige Menge $Y_{\max} \in \mathcal{M}$ mit maximalem Gewicht

der (eingeschränkte) Greedy Algorithmus:

Setze: $Y = \emptyset$

REPEAT

- entferne das Element $x \in X$ mit nächstgrößtem Gewicht aus X ;
- falls $Y \cup \{x\}$ unabhängig, füge x zu Y hinzu

UNTIL $X = \emptyset$

Definition: Matroid

Theorem: Für ein monotonen Teilmengensystem (\mathcal{M}, X) folgende sind äquivalent:

- der Greedy Algorithmus für jede Gewichtung w_x der Elemente $x \in X$ eine optimale Lösung bestimmt
- die Ergänzungseigenschaft gilt: für je zwei unabhängige Mengen Y_1, Y_2 mit $|Y_1| < |Y_2|$ gibt es ein $x \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $Y_1 \cup \{x\}$ auch unabhängig ist
- die Maximalitätseigenschaft gilt: für beliebige Menge $Z \subseteq X$ gilt, dass *innerhalb von* Z alle nicht-vergrößerbaren unabhängigen Teilmengen haben dieselbe Größe.

Definition: Wenn ein monotonen Mengensystem (\mathcal{M}, X) a., b. oder c. erfüllt, (dann erfüllt es alle drei, und) heißt ein Matroid.

Matroide: Beispiele

Beispiele

1. **Graph-Matroid:** sei $G(V, E)$ fixiert, und sei

$$\mathcal{W} = \{E' \subset E \mid E' \text{ Wald}\}$$

dann ist (\mathcal{W}, E) ein Graph-Matroid.

(Wald = kreisfreier Graph)

2. **Matrix-Matroid:** sei $X = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$,
eine Vektormenge in \mathbb{R}^n fixiert, und sei

$$\mathcal{L} = \{Y \subset X \mid Y \text{ linear unabhängig}\}$$

dann ist (\mathcal{L}, X) ein Matrix-Matroid.

Austauschbarkeit (Erweiterbarkeit)

Eine vierte **äquivalente Eigenschaft** von Matroiden:

Sei (\mathcal{M}, X) ein monotones Teilmengensystem.

d. Austauschbarkeit:

für je zwei unabhängige Mengen $Y_1 \subset Y_2$,

und jedes $x \notin Y_2$ gilt: wenn $(Y_1 \cup \{x\}) \in \mathcal{M}$

dann gibt es ein $y \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $(Y_2 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{M}$.

(Wir können x gegen ein y austauschen, und so
unabhängigkeit bewahren.)

wird auch **Erweiterbarkeit** genannt

Behauptung: (a.) \iff (b.) \iff (c.) \iff (d.)

MATROID-SCHEDULING

Eingabe: n Aufgaben A_1, A_2, \dots, A_n
mit Fristen f_1, f_2, \dots, f_n , und
Strafen b_1, b_2, \dots, b_n .

b_i ist zu bezahlen wenn A_i zum Zeitpunkt f_i nicht fertig ist.
Die Ausführung einer jeden Aufgabe nimmt 1 Zeitschritt.

Ausgabe: Die Aufgaben sind so auf *einem* Prozessor auszuführen, dass die Strafe minimiert wird.

Sei $X = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

eine Aufgabenmenge $Y \in \mathcal{M}$ falls

die Aufgaben in Y fristgerecht ausführbar sind.

Behauptung: (\mathcal{M}, X) ist ein Matroid, und
der Greedy Algorithmus ergibt einen Schedule mit
maximaler Nicht-Strafe.

Matroide: k -Matroide

Beispiel: Matchings

Sei $G(V, E)$ ein Graph, und eine Kantenmenge $M \in \mathcal{M}$ falls M ein Matching ist, d.h. keine zwei Kanten einen gemeinsamen Endpunkt haben.

Sei jetzt jede Kante e mit w_e gewichtet. Im Problem max-WEIGHTED-MATCHING suchen wir ein Matching mit maximalem Gewicht.

Greedy-Matching Algorithmus

$M := \emptyset;$

REPEAT

- sei $e \in E$ mit maximum w_e ; setze $E := E \setminus \{e\}$;
- wenn $M \cup \{e\}$ ein Matching setze $M := M \cup \{e\}$
(sonst verwirf e)

UNTIL $E = \emptyset$

Behauptungen:

- a. Der Greedy-Matching Algorithmus ist 2-approximativ für max-WEIGHTED-MATCHING.
- b. Seien M_1 und M_2 Matchings s.d. $|M_2| > 2 \cdot |M_1|$, dann gibt es eine $e \in M_2 \setminus M_1$ so dass $M_1 \cup \{e\}$ auch ein Matching ist (die 2-Ergänzungseigenschaft gilt).
- c. Sei $Z \subseteq E$. Wenn M_1 und M_2 nicht-vergrößerbare Matchings im Graphen (V, Z) sind, dann gilt $|M_2| \leq 2|M_1|$ (die 2-Maximalitätseigenschaft gilt).

Definition: k-Matroid

Theorem: Folgende sind äquivalent für ein monotones Teilmengensystem:

- der **Greedy** Algorithmus bestimmt für jede Gewichtung der Elemente eine **k-approximative** Lösung;
- die **k-Ergänzungseigenschaft** gilt: für je zwei unabhängige Mengen Y_1, Y_2 mit $|Y_2| > k \cdot |Y_1|$, gibt es ein $x \in Y_2 \setminus Y_1$ so dass $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig ist;
- die **k-Maximalitätseigenschaft** gilt: für beliebige Menge $Z \subseteq X$, und je zwei nicht-vergrößerbare unabhängige Teilmengen gilt $|Y_2| \leq k \cdot |Y_1|$;

Definition: Ein monotones Teilmengensystem (\mathcal{M}, X) heißt ein **k-Matroid**, wenn es eine (und somit alle) der Eigenschaften a., b. und c. erfüllt.

2-Austauschbarkeit: Beispiel

Behauptung:

- d. Seien $M_1 \subseteq M_2$ Matchings in einem Graphen $G(V, E)$ und e eine Kante nicht in M_2 .

Wenn $M_1 \cup \{e\}$ ein Matching ist, dann gibt es höchstens 2 Kanten $e_1, e_2 \in M_2 \setminus M_1$, so dass $(M_2 \setminus \{e_1, e_2\}) \cup \{e\}$ auch ein Matching ist.

(Matchings sind 2-Austauschbar.)

k-Austauschbarkeit

- d. Ein monotones Teilmengensystem (\mathcal{M}, X) ist k-Austauschbar wenn für je zwei unabhängige Mengen $Y_1 \subset Y_2$ und jedes Element $x \notin Y_2$ gilt:

Wenn $Y_1 \cup \{x\}$ unabhängig ist, dann gibt es eine Teilmenge $T \subseteq Y_2 \setminus Y_1$ von höchstens k Elementen so dass $(Y_2 \setminus T) \cup \{x\}$ unabhängig ist.

Behauptung: Wenn (\mathcal{M}, X) k-austauschbar ist, dann ist (\mathcal{M}, X) ein k-Matroid.

(k-Matroid $\not\Rightarrow$ k-austauschbar)

Behauptung: Wenn ein Teilmengensystem \mathcal{M} der Durchschnitt von k Matroiden $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$ ist (über die selbe Grundmenge X), dann ist \mathcal{M} k-austauschbar und somit ein k-Matroid.